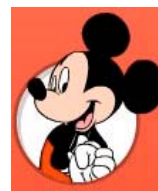


“Con l’aiuto di Topolino vincerete la Coppa Fermat!”

Liceo Scientifico Marconi – Carrara
gara a squadre di matematica
allenamento per la Coppa Fermat
24 Febbraio 2007



TESTI + RISPOSTE + TRACCE DI SOLUZIONE

Istruzioni Generali

- Per tutti i problemi occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero intero compreso tra 0000 e 9999. Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera (si ricorda che la parte intera di un numero reale x è il più grande intero minore od uguale ad x). Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000. Se la quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, oppure se non è univocamente determinata, si indichi 9999.

- Quanto sopra vale a meno che nel singolo problema non sia diversamente specificato.

- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tenere conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1,4142 \quad \sqrt{3} = 1,7321 \quad \sqrt{5} = 2,2361 \quad \sqrt{6} = 2,4495 \quad \sqrt{7} = 2,6458 \quad \pi = 3,1416.$$

1) L’invasione dei batteri golosoni

Topolinia è stata attaccata da una colonia di batteri golosoni. Il gruppo della scientifica del commissario Basettoni ha notato che in un piatto con del buon cibo i batteri golosoni proliferano e raddoppiano il loro numero ogni 12 ore. La scientifica ha appena portato il piatto a Basettoni dicendogli che in quel preciso momento il piatto ospita, oltre al cibo, una gaudente colonia di 1.000.000 di batteri. Basettoni chiede a Topolino di dirgli quante ore impiegheranno i batteri golosoni presenti nel piatto a raggiungere il numero di 64.000.000. Quale risposta fornirà Topolino al suo amico commissario?

[Risposta 0072](#)

Essendo $64 = 2^6$ ci vogliono $6 \times 12 = 72$ ore a passare da 1.000.000 a 64.000.000

2) Il compleanno di Tip e Tap

Al compleanno di Tip e Tap Eta Beta tira fuori dal suo magico gonnellino dapprima una montagna di caramelle e quindi una montagna di cioccolatini. Eta Beta dice ai ragazzi che la prima montagna contiene 31285^{257} caramelle mentre la seconda montagna contiene 7115379 cioccolatini. Tip e Tap assieme ad altri 9 amici hanno deciso di dividersi equamente sia le caramelle che i cioccolatini, lasciando a Pluto le caramelle ed i cioccolatini rimanenti al termine delle due divisioni. Determinare quante caramelle e quanti cioccolatini toccheranno a Pluto, riportare come risposta nelle prime due caselle il numero delle le caramelle e nelle seconde due caselle il numero dei cioccolatini (ad esempio se a Pluto toccano 2 caramelle e 3 cioccolatini riportare 0203)

[Risposta 0107](#)

Resto della divisione per 11 di 31285 è $5-8+2-1+3=1$ quindi anche se elevato a 257 il resto è sempre 1

Resto della divisione per 11 di 7115379 è $9-7+3-5+1-1+7=7$

3) Manetta alle prese con la statistica

Basettoni ha incaricato il fido Manetta di fare una indagine statistica per chiarire il rapporto esistente tra le persone che manifestano problemi di pressione alta e quelle che consumano alcool. Manetta dopo alcuni giorni porta al commissario un rapporto da cui si evince che 25 cittadini su mille hanno la pressione alta e tra questi 78 su cento sono bevitori. Inoltre Manetta ha rilevato che tra le persone che non hanno la pressione alta 38 persone su cento sono dei bevitori. Alla luce del rapporto di Manetta determinate qual è la percentuale delle persone che hanno la pressione alta tra i bevitori.

[Risposta 0005](#)

Ogni 1000 cittadini i bevitori con pres alta sono $A=25 \cdot 78/100$ mentre i bevitori con pressione bassa sono $B=(1000-25) \cdot 38/100$, per cui basta calcolare $A \cdot 100 / (A+B)$ che da 5%

4) Il quesito della sfinge

Topolino si è imbattuto in una sfinge che, per permettergli di passare, lo obbliga a risolvere il seguente quesito "quante sono le terne di numeri reali (x,y,z) in cui è pari a 2 la somma tra uno qualsiasi dei numeri della terna ed il prodotto degli altri due?"

Riportare il numero delle terne determinate.

[Risposta 0002](#)

Le uniche soluzioni sono $(1,1,1)$ e $(-2,-2,-2)$, il sistema può essere rapidamente risolto se si sottraggono tra loro 2 delle equazioni

5) Il diadema del Re di Numeropoli

Topolino dopo varie peripezie è riuscito a recuperare un prezioso diadema rubato al Re di Numeropoli. Il grande re ha deciso di premiare Topolino con 100.000 dollari, ma, in ossequio al fatto che nel suo regno la teoria dei numeri è legge sovrana, dà l'opportunità a Topolino di aumentare il suo premio moltiplicandolo per il MCD (Massimo Comun Divisore) dell'insieme dei numeri $16^n+10n-1$ ottenuti ponendo $n=1,2,3,\dots$

Quanto vale il MCD?

[Risposta 0025](#)

La successione è chiaramente monotona crescente, il primo numero è 25 quindi le possibili risposte si riducono subito a tre: 1, 5, 25. Calcolando anche uno o 2 termini successivi (che sono 275 e 4125) il sospetto che la risposta sia 25 è forte e può essere ragionevolmente tentata. La dimostrazione che è esattamente 25 non è facile, si può fare in via diretta ponendo $16^n=(1+15)^n=1+15n+15^2k=1+15n+25h$ (k e h interi) e quindi $16^n+10n-1=1+15n+25h+10n-1=25(n+h)$ oppure per induzione.

6) Il giardino di Minni

Minni ha un sogno magnifico, può adibire a giardino una grandissima superficie piana! Nel sogno Minni decide di riempire il suo giardino con tantissime aiuole circolari tutte uguali piazzate in modo regolare dove ogni aiuola ne tocca altre sei. Quindi riempie le aiuole di fiori mentre all'esterno della aiuole fa crescere della erbetta all'inglese. Al risveglio Minni si preoccupa che il suo magnifico giardino era, forse forse, un po' troppo pieno di fiori e allora chiede a Topolino di stimare quale era la percentuale del giardino ricoperta dalle aiuole. Riportare come risposta la parte intera della percentuale stimata da Topolino.

[Risposta 0090](#)

Ogni cerchio di raggio R ha 6 cerchi uguali disposti regolarmente attorno i cui centri formano un esagono regolare di lato pari a 2R e quindi facile arrivare a determinare il rapporto richiesto che è $\pi/(2\sqrt{3}) = 90,7\%$ (ad es. può essere fatto come rapporto tra l'area di un cerchio e quella dell'esagono)

7) Il compito di Tip e Tap

Tip e Tap hanno chiesto a zio Topolino un aiuto per risolvere un problema di matematica che il loro terribile insegnante ha proposto come compito per casa. Tip e Tap devono trovare quali sono i numeri interi positivi di 2 cifre per cui è 12 la differenza fra il numero cercato ed il prodotto delle sue cifre.

Riportare come risposta la somma di tutti i numeri determinati.

[Risposta 0067](#)

Posto se n si scrive xy allora $n=10x+y$. Quindi poiché $n-xy=12$ si ottiene $10x+y-xy=10$ questa equazione si scompone ad esempio così: $x(10-y)+y-10=2$ da cui $(10-y)(x-1)=2$ poiché si parla di interi le uniche possibilità sono: $10-y=1$ e $x-1=2$ che porta alla soluzione $n=39$; $10-y=2$ e $x-1=1$ che porta a $n=28$, la risposta quindi è $39+28=67$

8) Il machiavellico Macchia Nera

Topolino è sulle tracce del machiavellico Macchia Nera, il quale ha attirato il povero topolino in una perfida trappola, un grande salone che ha cento porte tutte uguali e numerate in modo progressivo a partire da zero. Dietro ogni porta c'è una trappola mortale ad eccezione di un'unica porta che è l'uscita. Macchia Nera ha dato una possibilità a Topolino, se riesce a sommare tutte le cifre che appaiono sulle porte allora otterrà un numero che, sebbene non sia il numero della porta di uscita, gli permetterà di determinare la porta d'uscita. Basterà infatti che Topolino sommi le cifre del numero ottenuto ed il risultato finale sarà finalmente il numero che contraddistingue la porta di uscita. Qual è porta di uscita?

[Risposta 0009](#)

Le porte sono numerate da 0 a 99, la somma $0+1+2+\dots+9=45$, di queste somme ce ne sono 10 (i numeri da 0 a 9, quelli da 10 a 19, da 20 a 29 fino agli ultimi da 90 a 99) e quindi un tot di 450. Vanno poi aggiunti 10 uni + 10 dui + 10 trei + ... +10 novi = di nuovo a 450! Tot generale quindi 900, la porta di uscita quindi è $9+0+0=9$

9) Lo scrigno del pirata Barbanera

Topolino ha ritrovato lo scrigno del tesoro del pirata Barbanera, purtroppo è chiuso da un grosso lucchetto con una combinazione a tre cifre. Il grande pirata era un po' smemorato ma era anche un bravo matematico

e così ha lasciato, intarsiate sullo scrigno, le seguenti indicazioni per aprire lo scrigno: "Il numero da comporre è un quadrato perfetto ed è composto da tre cifre che sono numeri distinti ma consecutivi, anche se non necessariamente nell'ordine, e la cui somma è pari a nove". Qual è la combinazione giusta?

[Risposta 0324](#)

$x+(x+1)+(x+2) = 9 \rightarrow x=2$ quindi le 3 cifre della combinazione sono 234, ora bisogna trovare quale delle 6 permutazioni possibili è un quadrato perfetto, poiché il numero si sa che è divisibile per 9 ($=3^2$) basta dividere per 9 le sei possibilità e si determina che solo $324/9=36=6^2$ è un quadrato perfetto ($324=18^2$)

10) La colonia di marziani

Topolino ospita una colonia di marziani. Topolino recatosi da loro scopre che esistono marziani di 3 razze differenti, i marzibà, i marzibò ed i marzibù. Volendo determinare il numero dei marziani Topolino chiede informazioni ad un marzibà e questi gli risponde che sommando il quadrato del numero dei marzibà a 4 volte il prodotto delle altre due razze ed aggiungendo infine il tutto al quadrato del numero dei marzibò si ottiene 70. Un marzibò invece gli dice che sommando il quadrato del numero dei marzibò a 4 volte il prodotto delle altre due razze ed aggiungendo il tutto al quadrato del numero dei marzibù si ottiene 54. Un marzibù poi gli confessa che sommando il quadrato del numero dei marzibù a 4 volte il prodotto delle altre due razze ed aggiungendo il tutto al quadrato del numero dei marzibà si ottiene 38.

Quanti sono in totale i marziani a Topolinia?

[Risposta 0009](#)

Scritto il sistema di 3 equazioni, sommando le tre equazioni tra loro e semplificando per 2 si ottiene l'equazione $x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz=81$ e quindi $(x+y+z)^2=9^2$, da cui la risposta è +9 (il problema è stato costruito utilizzando $x=1$ $y=3$ $z=5$)

11) Prato all'inglese

Minni ha appena deciso di fare un bel prato all'inglese nel suo giardino, quindi si fa accompagnare da Topolino a comprare i semi necessari. Il negoziante per poter fornire la giusta quantità di semi, chiede loro quant'è l'area totale da seminare. Topolino a questo punto deve rispondere al negoziante senza poter tornare a casa a misurare il giardino (Minni ha fretta, non c'è tempo da perdere!). Per fortuna il nostro eroe ricorda che la superficie del giardino è uguale a quella della regione di un piano Cartesiano i cui punti (x,y) soddisfano la disequazione $|x|+|y|+|x+y|\leq 20$. Determinare l'area del giardino di Minni.

[Risposta 0300](#)

Il problema va diviso in 4, e risolto separatamente per ogni quadrante. Grazie alla simmetria basta determinare la soluzione nei quadranti I e II e quindi raddoppiare. Nel quadrante I la soluzione è immediata, si perviene alla disequazione $y\leq 10-x$ che è metà di un quadrato di lato 10. Nel quadrante II si può separare ulteriormente il problema in 2 casi $y\leq x$ e $y>x$ ottenendo il quadrato di lato 10. Alla fine quindi l'area è la somma di 3 quadrati di lato 10 ed è pari a 300.

12) Serata tra amici

Topolino ha invitato Pippo, Paperoga e Paperino a passare una serata a casa sua. Dopo cena Paperoga propone di giocare a "chi-perde-raddoppia" che è un gioco dove ad ogni mano chi perde deve raddoppiare i soldi che hanno in quel momento gli altri tre giocatori, tenendo conto che i giocatori dopo aver posto sul tavolo all'inizio del gioco i soldi che vogliono, non possono nel corso del gioco aggiungerne o toglierne fino alla fine che si ha quando uno dei giocatori non può pagare gli altri (o quando è ora di andare a letto!). Dopo 4 mani Topolino, Pippo, Paperoga e Paperino si ritrovano ad avere ognuno \$ 64. Determinare con quanti soldi ognuno ha cominciato il gioco sapendo che tutti e quattro hanno perso una sola volta e che Topolino era quello che aveva all'inizio più soldi seguito in ordine decrescente da Pippo, Paperoga e Paperino.

Riportare nella risposta le cifre delle unità dei soldi iniziali di Topolino, Pippo, Paperoga e Paperino (ad es. se il risultato fosse Topolino \$ 97, Pippo \$ 65, Paperoga \$ 28 e Paperino \$ 21 riportare come risposta il numero: 7581)

[Risposta 2860](#)

La soluzione si ottiene in modo veloce ragionando "all'indietro": alla fine si ha 64 64 64 64, quindi al passo precedente si aveva 32 32 32 160, prima ancora 16 16 144 80, che proviene da 8 136 72 40 ed all'inizio allora era 132 68 36 20

13) Il problema di Pippo

Pippo oggi è andato a trovare Topolino perchè il suo arcibisepo nipote gli ha posto il seguente terribile problema: su un esagono regolare di lato 3 viene sovrapposto un triangolo equilatero di lato 6 in modo che un vertice del triangolo coincida col centro dell'esagono, inoltre uno dei lati del triangolo interseca uno dei lati dell'esagono in modo che il punto di intersezione divide il lato dell'esagono in due parti di cui una è il doppio dell'altra, determinare l'area comune alle due figure.

Fornire come risposta il valore dell'area moltiplicato 1000 (la parte intera se necessario).

[Risposta 3897](#)

Si dimostra che l'area richiesta altro non è che $\frac{1}{6}$ dell'area dell'esagono, il risultato è indipendente dalla lunghezza dei lati del triangolo equilatero (purchè sufficientemente lunghi e 6 è certamente sufficiente) e anche dalla rotazione del triangolo, quindi 2 dati forniti sono ininfluenti. La risposta è $\frac{9\sqrt{3}}{4} \times 1000 = 3897,225$

di cui, si fornisce solo la parte intera.

14) Le tre isole

A Topolino gli abitanti di un piccola isola sperduta nel Pacifico hanno affidato il compito di determinare le distanze di due vicine isolette minori dalla loro isola. A Topolino viene detto che una volta un pescatore di passaggio aveva affermato che le tre isole in questione formano un triangolo rettangolo i cui lati, misurati in Km, sono numeri interi primi tra loro. Il pescatore aveva anche affermato che le due isolette minori sono i vertici di uno dei due cateti e distano tra loro 21 Km. Un vecchio saggio dice inoltre a Topolino che entrambe le due isolette minori distano dalla loro isola certamente meno di 50 Km. Topolino si convince che queste informazioni sono sufficienti per risolvere il problema, riportate nelle due caselle iniziali della risposta la lunghezza del cateto mancante (in Km) e nelle altre due caselle la lunghezza dell'ipotenusa (in Km), ad es. se il cateto fosse 15 Km e l'ipotenusa fosse 37 Km la risposta è 1537.

Risposta 2029

Si tratta di determinare una terna pitagorica primitiva con un cateto lungo 21. Usando la parametrizzazione delle terne primitive essendo 21 dispari $21 = a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ quindi ci sono 2 sole possibilità: $a+b=21$ e $a-b=1$ oppure $a+b=7$ e $a-b=3$. Si scarta la prima possibilità che porta alla terna 21, 220, 221 essendo $220 > 50$, la seconda possibilità da la terna 20, 21, 29 che è invece accettabile e quindi la risposta è 2029

15) Il granaio di Nonna Papera

Nonna Papera ha deciso di costruire un nuovo granaio all'interno della sua vasta tenuta che è un campo piano a forma di quadrilatero convesso e chiede a Topolino di determinare il punto migliore dove costruirlo. Nonna Papera vuole costruire il granaio in un punto che minimizzi la somma delle distanze dai quattro punti di vertice del quadrilatero e fornisce a Topolino una pianta della tenuta dove si vede che due lati sono tra loro ortogonali e misurano 5 Km e 12 Km, inoltre 12 Km è anche il lato opposto a quello di 5 Km ed infine l'angolo formato tra il lato di 5 Km e la diagonale che parte dal vertice che sottende l'angolo retto è di 30° . Topolino indica a Nonna Papera dove deve essere posizionato il granaio, a voi il compito di calcolare quanto vale in Km la somma delle distanze del punto dove sorgerà il nuovo granaio dai quattro vertici del quadrilatero.

Risposta 0025

Il punto richiesto è quello di incontro delle 2 diagonali che minimizza contemporaneamente la somma delle distanze dai 2 vertici opposti del quadrilatero convesso (per convincersene si consideri due vertici opposti, un qualunque punto che non appartenga alla diagonale tra i 2 punti ha certamente somma delle distanze maggiore (disuguaglianza triangolare) e tutti i punti della diagonale sono invece equivalenti, idem per l'altra diagonale, ma allora il loro punto di incontro minimizza contemporaneamente la somma delle 4 distanze). La risposta richiesta è quindi la somma delle lunghezze delle 2 diagonali. Una diagonale si determina subito come ipotenusa del triangolo rettangolo e vale 13 (terna pitagorica 5,12,13), per l'altra diagonale non servono calcoli, basta notare che siamo in presenza di un triangolo equilatero e quindi il lato vale 12. Risposta $12+13=25$.

16) I cavalli del bis bis bis nonno Pippus

Pippo ha ritrovato in soffitta un vecchissimo documento del suo bis bis bis nonno Pippus che era un famoso grande allevatore. Il bis bis bis nonno racconta nel documento che aveva 7 magnifici cavalli da corsa e per loro aveva fatto costruire una grande stalla con 7 box uguali ed allineati. Purtroppo il povero Pippus narra anche che aveva un problema terribile con 2 dei suoi cavalli che si odiavano a morte e quando la sera portava i sette cavalli nella stalla, mettendone uno in ogni box, doveva star ben attento a porre fra i due antagonisti almeno un altro cavallo. Determinate in quanti modi differenti il bis bis bis nonno di Pippo poteva sistemare i suoi cavalli nei box della stalla evitando il problema citato di incompatibilità cavallina.

Risposta 3600

I 7 cavalli possono essere piazzati in $7! = 5040$ modi differenti, i modi di piazzare vicino i 2 cavalli incompatibili sono $6! \cdot 2! = 1440$ (i 2 cavalli fanno blocco unico e con gli altri 5 si hanno $6!$ permutazioni, però i 2 cavalli terribili possono permutare tra loro da cui $2!$), la risposta quindi è $5040 - 1440 = 3600$

17) Tre attaccabrighe

Gambadilegno ed altri due attaccabrighe sono stati confinati su un'isola deserta che è di forma quadrata con lato pari a 10 Km. Gambadilegno si è subito costruito una capanna su uno dei quattro vertici dell'isola, compito di Topolino ora è di obbligare gli altri due energumeni a costruirsi una capanna ciascuno in modo che sia massima la minima delle distanze tra le tre capanne. Determinare il valore massimo possibile della

minima distanza tra le capanne e riportare come risposta la parte intera del quadrato del valore ottenuto (in Km²).

Risposta 0107

Fissato un vertice del quadrato la soluzione si ottiene ponendo gli altri 2 punti sui lati opposti del quadrato in modo da formare un triangolo equilatero. A questo punto si può procedere con la trigonometria poiché gli angoli formati dal lato del triangolo equilatero con il lato del quadrato dove al vertice c'è una delle tre capanne sono 15° e 75°, il lato del triangolo cercato è quindi $10\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(15^\circ)}$ a questo punto ci vuole un po' di trigonometria per ottenere che $\operatorname{tg}(15^\circ) = 2 - \sqrt{3}$ e quindi il lato è $20\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ il cui quadrato è $400(2 - \sqrt{3}) = 107.16$, oppure ponendo ad es. x = la distanza di una delle 2 capanne da un vertice e $10 - x$ l'altra distanza, utilizzando 2 volte il teorema di Pitagora ed impostando una equazione di secondo grado.

18) Indiana Topojones alla ricerca dell'arpa perduta

Indiana Topojones ha trascinato il nostro eroe alla ricerca dell'arpa perduta. Dopo varie peripezie i due si ritrovano all'interno di una sala funeraria a forma di esagono i cui vertici stanno tutti su una circonferenza. Una mappa indica loro che la preziosa arpa è nascosta in una nicchia segreta e per poterla ritrovare Indiana deve scoprire il valore esatto del raggio della circonferenza in cui è inscritto l'esagono. A tal fine Topolino rileva che l'esagono è costituito da 3 lati consecutivi ciascuno di lunghezza 9 m, mentre gli altri tre lati sono lunghi 21 m ognuno. Quanto vale (in m²) il quadrato della lunghezza del raggio cercato?

Risposta 0237

Considerati due lati consecutivi di lunghezza 9 e 21 m si nota che l'angolo al centro dell'arco che li sottende entrambi è 120° (360°/3), altrettanto vale l'angolo compreso tra i due lati di 9 e 21 m (angolo alla circonferenza con angolo al centro di 240°). Quindi applicando Carnot 2 volte si ottiene $R^2 + R^2 - 2R^2 \cos(120^\circ) = 9^2 + 21^2 - 2 \cdot 9 \cdot 21 \cos(120^\circ)$ da cui $R^2 = 237$

19) Tempo di elezioni

A Topolinia è tempo di elezioni e Topolino sta guardando una trasmissione dove i vari partiti politici in lizza espongono le proprie promesse agli elettori. Topolino si è annotato scrupolosamente tutte le promesse fatte da ogni partito e alla fine rileva che il numero di promesse distinte è in realtà solo pari a 6. Topolino ha anche notato che, sebbene nessuna coppia di partiti abbia mai fatto esattamente le stesse promesse, qualunque coppia di partiti ha sempre almeno una promessa in comune. Pensandoci un po' su Topolino giunge alla conclusione che il numero di partiti in lizza è esattamente pari al massimo numero possibile compatibile con le suddette condizioni. Quanti sono i partiti in campo a Topolinia?

Risposta 0032

Il numero totale di sottoinsiemi possibili con 6 elementi (le promesse) è 2^6 poiché in ogni sottoinsieme un elemento c'è o non c'è, quindi 2 possibilità per ogni elemento da cui $2 \times 2 \times \dots \times 2$ sei volte è il num di sottoinsiemi che corrisponde al massimo numero di partiti che possono fare 6 promesse distinte senza che nessuno faccia esattamente le stesse promesse di un altro. D'altra parte la condizione che 2 partiti abbiano sempre almeno una promessa in comune implica che se un certo sottoinsieme è "buono" il suo complementare va scartato, quindi il numero massimo di partiti possibile è $2^6/2 = 32$. Ma questo è solo un limite superiore, ora per esser certi che la risposta giusta è 32 bisogna trovare una possibile soluzione che corrisponde proprio a 32, questo è possibile pensando di scegliere una promessa e metterla da parte per assegnarla a tutti i partiti (questa è quindi la soluzione "banale" che prevede una stessa promessa comune a tutti i partiti), a questo punto rimangono a disposizione 5 promesse che possiamo utilizzare per formare un massimo di $2^5 = 32$ partiti possibili che rispettano i nostri vincoli e così siamo a posto.

20) Una strana astronave

Topolino ha scoperto una strana astronave, dopo una attenta osservazione Topolino capisce che l'astronave è formata da due tetraedri regolari uguali che si intersecano in modo che ogni faccia di uno passi attraverso i punti medi di tre spigoli concorrenti dell'altro (spigoli concorrenti sono quelli che vanno a formare un vertice del tetraedro). Nel suo complesso l'astronave si presenta quindi come una bella stella tridimensionale! Topolino riesce a determinare il rapporto tra il volume dell'astronave e quello del solido intersezione dei due tetraedri. Riportare nella risposta tale rapporto moltiplicato per 100 (la parte intera se necessario).

Risposta 0300

La stella è composta da 8 "punte" (4 + 4 vertici del 2 tetraedri) tutte uguali a dei tetraedri di lato $\frac{1}{2}$ dei due tetraedri iniziali e quindi ogni "punta" ha un volume pari a $\frac{1}{8}$ del tetraedro iniziale. L'intersezione è pari al volume di un tetraedro meno 4 "punte" e quindi è $\frac{1}{2}$ del volume del tetraedro iniziale. L'astronave ha allora un volume totale pari a 8 "punte" + l'intersezione e quindi pari a $\frac{3}{2}$ del volume del tetraedro iniziale. Il rapporto cercato quindi è 3 e la risposta è $3 \times 100 = 300$

21) Topolino vince la lotteria di Numeropoli!

Topolino ha vinto la lotteria di Numeropoli! Essendo però a Numeropoli non tutto fila via liscio e Topolino scopre che la sua vincita in realtà dipenderà molto dalla sua abilità matematica, infatti gli hanno detto che il premio finale sarà direttamente proporzionale al numero di elementi della progressione geometrica con ragione maggiore di 1 che lui riuscirà a scrivere, scegliendo i termini della progressione tra i numeri interi che sono compresi tra 100 e 1000 estremi inclusi. Determinare il numero massimo possibile di elementi che Topolino può sperare di scrivere e riportare come risposta la somma tra questo numero, il primo termine e l'ultimo termine della progressione.

Risposta 1106

Posto a_1 il primo termine della progressione e detta q la sua ragione, l'ultimo termine è $a_n = q^{n-1} a_1$. La soluzione si ottiene cercando di minimizzare q ed a_1 tenendo conto che i termini devono essere numeri interi. Una soluzione con tutti interi porta ad una scelta tipo $a_1 = 100$ e $q = 2$ che da "solo" 4 termini. L'idea buona è di utilizzare un q razionale in modo che q^{n-1} divida il primo termine. La soluzione buona è quella in cui a_1 è una potenza di 2, per la precisione $a_1 = 2^7 = 128$ con $q = 3/2$, da cui $a_6 = 128 (3/2)^5 = 972$ e quindi il numero massimo di termini della progressione è 6. Risposta = $6 + 128 + 972 = 1106$

22) Il compleanno di Topolino

Minni per festeggiare il compleanno di Topolino ha deciso di invitare due coppie di vecchi amici: Orazio e Clarabella, Paperino e Paperina. Al momento di sedersi a tavola, un bel tavolo rotondo, Paperino fa un po' di confusione col risultato che alla fine i sei amici si trovano a tavola in un modo che nessuno ha seduto al proprio fianco il rispettivo compagno o compagna. Calcolare qual è la probabilità di tale evento come percentuale, riportare come risposta la parte intera del valore ottenuto.

Risposta 0026

$5! = 120$ sono tutte le disposizioni possibili iniziali dopo aver "orientato il tavolo", cioè piazzato a sedere uno dei 6 amici a caso. Per conteggiare i casi favorevoli si può procedere per differenza calcolando invece i casi di coppie vicine (col principio di inclusione ed esclusione applicato ad una unione a 3), si ottiene:

$5! - (3 \cdot 2! \cdot 4! - 3 \cdot 3! \cdot 2! \cdot 2! + 2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!) = 120 - (144 - 72 + 16) = 120 - 88 = 32$ dove

- $3 \cdot 2! \cdot 4!$ = tutti i casi con una coppia vicina = scelta una coppia su 3 a caso la si piazza (orienta il tavolo), i suoi componenti possono permutare da cui $2!$ I 4 amici rimanenti si piazzano in $4!$ modi differenti
- $3 \cdot 3! \cdot 2! \cdot 2!$ = tutti i casi con 2 coppie vicine (le intersezioni a 2 che vanno sottratte) = 3 per la coppia rimasta esclusa, preso un membro a caso di questa coppia lo si fa sedere dove vuole (orienta il tavolo), rimangono 2 coppie ed uno "scoppiato" che si piazzano in $3!$ modi differenti, infine le 2 coppie possono permutare i loro membri da cui $2! \cdot 2!$
- $2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!$ = tutti i casi con tre coppie contemporaneamente vicine (la intersezione a 3 che va di nuovo sommata) = si piazza una coppia a caso e rimangono 2 coppie da piazzare in $2!$ modi, quindi ogni membro di ogni coppia può permutare da cui $2! \cdot 2! \cdot 2!$

Risultato $32/120 = 4/15 = 26.67\%$ risposta 0026

Il calcolo dei casi favorevoli può essere fatto in modi differenti, un altro è il seguente: detti (A_1, B_1) (A_2, B_2) (A_3, B_3) i 6 elementi delle 3 coppie, si comincia a prenderne uno a caso e lo si fa sedere dove vuole ... questo non influisce sul risultato e "orienta il tavolo". Diciamo A_1 la prima persona seduta, al suo fianco a dx possiamo scegliere 4 tra le persone delle altre 2 coppie, diciamo A_2 . Ora abbiamo una diramazione con 2 casi:

- a) a dx di A_2 si siede B_1 e quindi non potendo poi scegliere B_2 rimangono 2 possibilità (uno dei 2 della terza coppia), gli ultimi 2 posti a sedere sono obbligati -> TOT $4 \cdot 2 = 8$ possibilità
- b) a dx di A_2 siede uno della terza coppia, diciamo A_3 , con 2 possibilità qui abbiamo una sottodiramazione con 2 casi:
 - 1) a dx di A_3 si siede B_1 , a seguire possono andare indifferentemente B_2 o B_3 quindi 2 possibilità -> TOT $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ possibilità
 - 2) a dx di A_3 si siede B_2 ed a questo punto gli ultimi 2 posti a sedere sono obbligati -> TOT $4 \cdot 2 = 8$ possibilità

Risultato finale $8 + 16 + 8 = 32$

23) Pippo va in cartoleria

Pippo ha bisogno di una penna, una gomma ed un taccuino e quindi va in cartoleria. All'uscita incontra Topolino e gli racconta che per i tre oggetti ha speso in tutto un dollaro. Topolino vorrebbe sapere qual è il costo unitario dei tre oggetti, ma Pippo purtroppo non lo ricorda più, ricorda però che i tre prezzi erano interi se espressi in centesimi. Pippo ci pensa un po' e poi ricorda anche che il costo di un taccuino era certamente maggiore di quello di due penne, che tre penne costavano certamente più di quattro gomme, ed infine che tre gomme costavano certamente più di un taccuino. A questo punto Topolino decide che le informazioni di Pippo sono sufficienti a risalire al costo dei tre oggetti. Determinare il costo della penna e

della gomma e come risposta riportare nelle prime due caselle il costo della penna e nelle seconde due caselle il costo della gomma (ad. es. se Penna = 10 e Gomma= 55 la risposta è 1055)

Risposta 2619

$P+G+T=100$, $T>2P$, $3P>4G$, $3G>T$. Quindi $3G>T(>2P)>8G/3$ inoltre $3G/2>(T/2)>P>4G/3$. Poiché $P+T=100-G$ si ottiene $(8G/3+4G/3=>) 4G<100-G<9G/2 (=3G+3G/2)$ la soluzione del sistema di 2 disequazioni porta a $200/11(=18.12)<G<20$ e quindi $G=19$

Ora $P+T=81$ e $50.7<T<57$ e $25.3<P<28.5$, ci sono 3 possibilità $P=26, 27, 28$

$P=26$ $G=19$ $T=55$ soddisfa tutte e 3 le disequazioni iniziali ed è la soluzione cercata mentre

$P=27$ $G=19$ $T=54$ e $P=28$ $G=19$ $T=53$ non soddisfano alla condizione $T>2P$ e quindi non si accettano

24) Scacchiera tridimensionale extraterrestre

Alcuni extraterrestri hanno proposto a Topolino di giocare con loro. Il gioco si svolge su una grande scacchiera tridimensionale, un grande cubo diviso in 27 cubetti tutti uguali. Topolino ad ogni mossa si deve spostare da un cubetto ad un altro e per far questo ogni volta deve:

- 1) prima pescare da un'urna un foglietto dove è indicato in quale direzione si può spostare, l'urna contiene tutte le volte 3 foglietti uno per ognuna delle 3 direzioni possibili, le due orizzontali e quella verticale parallele ai lati del cubo (non ci si può muovere in obliquo);
- 2) poi pescare da un'altra urna un foglietto che indica di quanti cubetti si può spostare e tutte le volte che Topolino pesca l'urna contiene solo due foglietti, uno con indicato +1 e l'altro con indicato -1 (cioè 1 in avanti o 1 indietro).

Topolino è obbligato a cominciare il gioco da uno degli otto cubetti di angolo (quelli che hanno tre facce rivolte verso l'esterno). Il gioco termina con la vittoria di Topolino quando egli raggiunge il cubetto centrale della scacchiera (quello che non ha alcuna faccia visibile dall'esterno), purtroppo il gioco termina anche facendo perdere immediatamente Topolino tutte le volte che il nostro eroe è obbligato a fare una mossa illegale (cioè una mossa che lo porterebbe all'esterno della scacchiera tridimensionale).

Determinare qual è la probabilità di vincere di Topolino. Riportare la risposta scrivendo nelle prime due caselle il numeratore e nelle altre due il denominatore dopo aver opportunamente semplificato, se necessario, numeratore e denominatore affinché siano primi tra loro (ad. es. se la risposta fosse $1/3$ indicare 0103).

Risposta 0122

Denotiamo con P_1 la probabilità di vittoria nel cubetto di partenza, all'inizio qualunque direzione sia scelta Topolino ha probabilità $1/2$ di continuare a giocare e i 3 cubetti raggiungibili sono equivalenti, indichiamo con P_2 la probabilità di vittoria partendo da uno di questi 3 cubetti, si ha quindi che $P_1=1/2 P_2$. A questo punto però $P_2=1/3 P_1 + 2/3 \cdot 1/2 (1/3 \cdot 1/2 + 2/3 P_2)$. Il sistema di 2 equazioni si risolve facilmente ottenendo $P_1=1/22$